Fonctions convexes

24 août 2016

1

Soit f une fonction concave positive sur $\mathbf{R}^+$, telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est sous-additive.

2

Soit f une fonction convexe C^1 de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
Montrer que $f(x)/x$ possède une limite l (éventuellement infinie) lorsque x tend vers $+\infty$, puis que, si l est finie, $f(x) - lx$ possède une limite en $+\infty$.

3

Soient I un intervalle ouvert réel et f une application réelle définie sur I. Pour tout réel μ, on note P_μ la propriété : "pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, $f + \mu Id$ atteint son maximum en a ou en b".
a) Montrer que f est convexe ssi elle vérifie P_μ pour tout μ réel.
b) On suppose désormais f continue. Montrer que f est convexe ssi, pour tout x et tout $h > 0$ tels que $x - h$ et $x + h$ sont dans I, on a :

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f.$$

4

Soit f une fonction convexe C^2 de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$. Etudier en $+\infty$ le comportement de $f'(x)$, $xf'(x)$, $f"(x)$.

5 Transformée de Fenchel

La droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$ est munie des opérations usuelles, on pose en particulier $0 \times +\infty = 0 \times -\infty = 0$.

Lorsque f est une application convexe d'un intervalle non vide I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on prolonge f en posant $f(x) = +\infty$ si $x \in \mathbf{R} \setminus I$. La fonction ainsi obtenue est alors convexe moyennant l'extension des opérations donnée ci-dessus.

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a) Montrer que, si f est continue, f est borne supérieure d'une famille de fonctions affines.

On définit une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ par

$$f^*(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} (xt - f(t))$$

b) Montrer que f^* est convexe. Déterminer f^* puis f^{**} lorsque f est affine.

c) On suppose ici f de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, avec $f" > 0$. Déterminer f^*.

d) On suppose f continue. Montrer que $f = f^{**}$.